روشی جبری برای حل یک مسئلهٔ هندسی

مصطفی مرادی
دانش‌آموز سوم ریاضی
دبیرستان نمونهٔ تربیت
خراسان جنوبی
بیرجند

کلیدواژه‌ها: قضیهٔ کسینوس‌ها، دایره‌های مماس

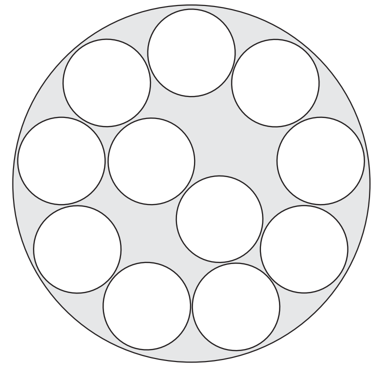
مقدمه

اگر از شما بپرسند که در مستطیلی به ابعاد ۴×۳ چند مربع به ضلع ۲ جای می‌گیرد، به سرعت می‌گویید ۲ تا. حال اگر از شما بپرسند که در دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر چند مربع به ضلع ۲ سانتی‌متر جای می‌گیرد، کمی مسئله سخت‌تر می‌شود. اما اگر بگویند در دایره‌ای به شعاع ۵ چند دایره به شعاع ۱ جای می‌گیرد چه‌طور؟ اگر سه دایره را در نزدیک‌ترین حالت کنار هم قرار بدهید متوجه می‌شوید که به راحتی نمی‌توان تصمیم گرفت. مطمئناً پاسخ به این مسئله فقط از راه رسم هندسی امکان‌پذیر است.

برای فهم مطلب فرض کنید می‌خواهید درون یک بشقاب (البته کاملاً دایره‌ای شکل) سکه‌های ۲۰۰ تومانی جای بدهید! و این سکه‌ها نمی‌توانند روی هم قرار بگیرند، بلکه باید کنار هم قرار بگیرند. شرط ما هم برای حل تمام مسائل مانند این مسئله این است که دایره‌های کوچک روی هم‌دیگر واقع نشوند (هم‌پوشانی نداشته باشند.) و در نزدیک‌ترین حالت بر هم مماس باشند.

در واقع ما می‌دانیم که در دایره‌ای به شعاع R حداقل یک دایره با شعاع K (K<R) جای خواهد گرفت. اما می‌خواهیم بدانیم حداکثر گنجایش دایرهٔ بزرگ‌تر برای دایره‌های کوچک چه‌قدر است.

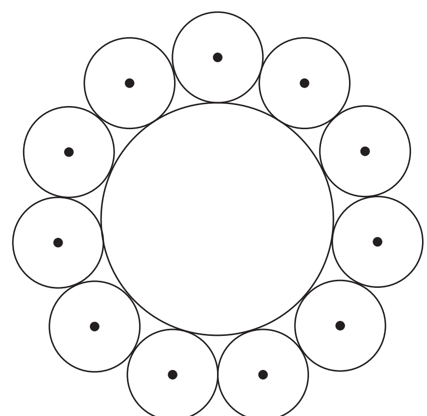
در این مقاله یک الگوریتم جبری برای حل این نوع مسائل ارائه می‌کنم تا بتوانیم به راحتی حداکثر گنجایش هر دایره را برای دایره‌های کوچک‌تر محاسبه کنیم.



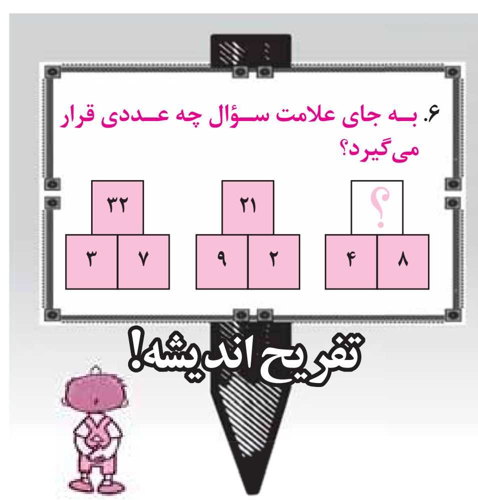
شکل ۱ حداکثر گنجایش یک دایره به شعاع ۴cm برای دایره‌هایی با شعاع ۱cm، ۱۱ دایره است.

الف) اثبات یک رابطهٔ موردنیاز پیش از حل مسئله

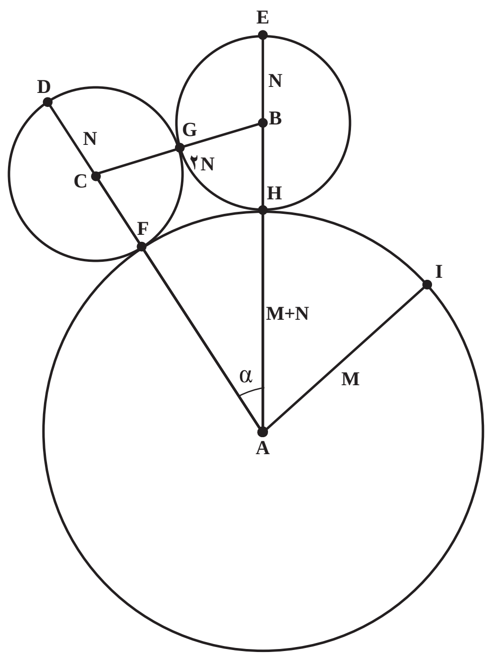
چگونه حداکثر تعداد دایره‌های هم‌شعاع (با شعاع N) مماس بر دایره به شعاع M را به‌دست آوریم؟ برای درک مطلب به شکل ۲ توجه کنید:



شکل ۲



برای محاسبه، مرکزهای دو دایرهٔ کوچک (B و C) را به هم متصل می‌کنیم. سپس هر دو مرکز را به مرکز دایرهٔ بزرگ وصل می‌کنیم تا مثلث ABC به‌دست آید (شکل ۳).



شکل ۳

می‌توانیم زاویهٔ α را از رابطهٔ زیر به‌دست بیاوریم. با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$(2N)^2 = (M+N)^2 + (M+N)^2 - 2(M+N)(M+N)\times\cos\alpha$$

$$\rightarrow 4N^2 = 2(M+N)^2 - 2(M+N)^2\times\cos\alpha$$

$$\rightarrow 2(M+N)^2\times\cos\alpha = 2(M+N)^2 - 4N^2$$

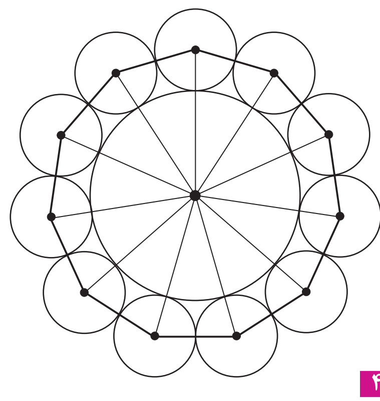
$$\rightarrow \cos\alpha = \frac{2(M+N)^2 - 4N^2}{2(M+N)^2}$$

$$\rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{4N^2}{2(M+N)^2} = 1 - \frac{2N^2}{(M+N)^2}$$

$$\rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(1 - \frac{2N^2}{(M+N)^2}\right)$$

حال به شکل ۴ توجه کنید:

با توجه به شکل می‌بینیم که برای هر مرکز دایرهٔ مماس خطی وجود دارد که مرکزهای دایره‌ها را به‌هم متصل می‌کند، همچنین، به ازای هر خط زاویه‌ای، مقابل آن‌که همان α است، وجود دارد. پس اگر بدانیم در



شکل ۴

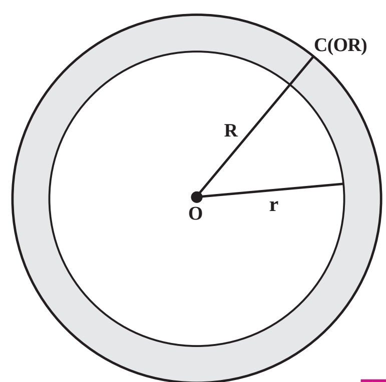
یک دایره چند زاویهٔ α داریم، می‌توانیم تعداد دایره‌های مماس را هم حدس بزنیم.

$$D = \left[\frac{۳۶۰}{\alpha}\right] = \text{تعداد دایره‌های مماس}$$

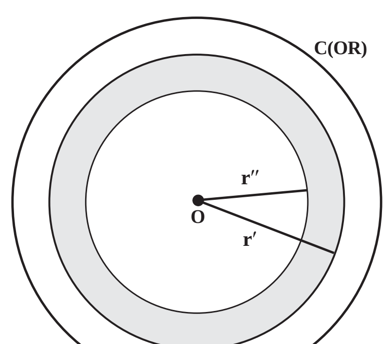
بنابرایـن تعداد دایره‌هـای مماس به شـعاع N بر دایره‌ای به شعاع M برابر مقدار D است.

ب) حلقه

اکنون به دو شکل ۵ و ۶ توجه کنید:



شکل ۵



شکل ۶

در شکل‌های مزبور قسمت رنگ شده را حلقه (L)[1] می‌نامیم و این‌گونه تعریف می‌کنیم: «حلقه عبارت‌است از سـطح محصور به دو دایره که در دایرهٔ C(O,R) قرار می‌گیرد.»

با توجه به دو شکل ۵ و ۶ می‌توان برای هر حلقه یک طول به‌صورت مقابل تعریف کرد:

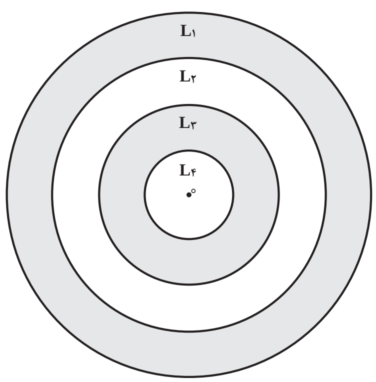
$W_L=R-r$: طول حلقهٔ شکل ۵

$W_L=r'-r''$: طول حلقهٔ شکل ۶

ممکن است یک دایره با شعاع R ‏(C(O,R)) چندین حلقه با طول برابر داشـته باشـد. آن‌گاه حداکثر تعداد حلقه‌هـا که طول برابـر دارند، به‌صورت زیر محاسـبه می‌شود:

$$\text{حداکثر تعداد حلقه‌ها} = \left[\frac{R}{W_{(\text{طول حلقه‌ها})}}\right]$$

سپس حلقه‌ها را به‌ترتیب از دورترین حلقه نسبت به مرکز دایره (L_1) شماره‌گذاری می‌کنیم (شکل ۷).



شکل ۷

نکتهٔ ۱: در دایرهٔ شـکل ۳ و دایره‌های مشـابه که $R=n\times w$ (یعنی شـعاع دایرهٔ بزرگ مضرب صحیحی از طول حلقه است)، آخرین حلقه (در شکل ۷، L_4) گرچه مانند یک دایره است، باز هم یک حلقه محسوب می‌شود.

طرح مسئله و روش حل آن

در یک دایره به شعاع R حداکثر چند دایره به شعاع K جای خواهد گرفت؟ (شـرط اول: $R>K$ – شرط دوم:

دو دایره هم شعاع در داخل دایرهٔ بزرگ حداکثر یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند (نقطهٔ تماس)- شرط سوم: دایره‌های کوچک نباید هم‌مرکز باشند.)

برای حل این مسئله ابتدا حداکثر تعداد حلقه‌ها را (مانند قسمت ب) به‌دست می‌آوریم (طول حلقه‌ها را برابر ۲k در نظر می‌گیریم):

$$\left\lfloor \frac{R}{۲k} \right\rfloor = \text{تعداد حلقه‌ها}$$

سپس تعداد دایره‌های مماس (دایره با شعاع K) به محیط داخلی هر حلقه را (طبق قسمت الف) محاسبه می‌کنیم. یک دایره هر تعداد حلقه داشت و آن حلقه هر تعداد دایره بر محیط خود داشت، جواب آخر مجموع تعداد دایره‌های مماس بر حلقه‌هاست.

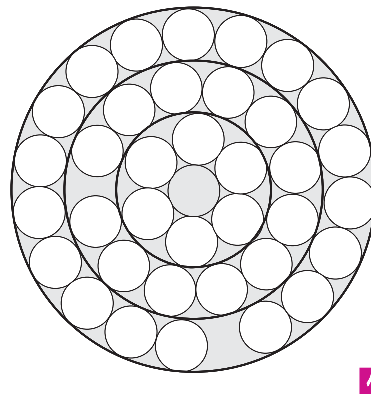
نکتهٔ ۲. اگر رقم اعشاری مرتبهٔ دهم حاصل تقسیم (قبل از گرفتن جزءصحیح)، ۰/۵ یا بزرگ‌تر از آن شد، به جواب آخر یک واحد می‌افزاییم.

مثال:

$R=۵cm, K=۱cm \rightarrow \frac{۵}{۲}=۲/۵$

$R=۱۳cm, K=۵cm \rightarrow \frac{۱۳}{۵}=۲/۶$

در دو مثال بالا، رقم اعشاری مرتبهٔ دهم ۰/۶ و ۰/۵ است. در نتیجه به محاسبات آخر یک واحد می‌افزاییم. علت این کار آن است که وقتی تقسیم را انجام می‌دهیم و جزءصحیح می‌گیریم، در واقع ممکن است که در مرکز دایره حلقه‌ای نداشته باشیم. اما شاید بتوان دایره‌ای را در مرکز قرار داد که در آن صورت به حاصل نهایی یک واحد می‌افزاییم.



شکل ۸

شعاع هر حلقه چه‌قدر است و تعداد دایره‌های مماس بر محیط آن چگونه به‌دست می‌آیند؟ مانند آنچه که در قسمت ب گفته شد، حلقه را شماره‌گذاری می‌کنیم. سپس طبق آنچه در قسمت الف گفته شد، مقدار B را برای هر حلقه به‌صورت جداگانه در فرمول ۱ محاسبه می‌کنیم (مقدار B در واقع مجموع شعاع حلقه + شعاع دوایر کوچک -K- است که برای سهولت در محاسبات استفاده می‌شود) و در ادامه آن را در فرمول ۲ قرار می‌دهیم تا α به‌دست آید. بعد با تقسیم عدد ۳۶۰ بر α، جزء صحیح این حاصل تقسیم را به‌دست می‌آوریم (فرمول ۳). عدد به دست‌آمده (D)تعداد دایره‌های مماس بر حلقه است. برای همهٔ حلقه‌ها به همین ترتیب مقدار D حلقه را به‌دست می‌آوریم و آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم تا مقدار C (گنجایش دایره) برای آن دایره به‌دست آید (فرمول ۴. در هنگام جمع این مقادیر حتماً باید به نکتهٔ ۲ توجه کنیم).

فرمول ۱ $B^{(۲)} = R - (۲L - ۱) \times k$

فرمول ۲ $\alpha = \cos^{-1}(۱ - \frac{۲ \times K^۲}{B^۲})$

فرمول ۳ $\left\lfloor \frac{۳۶۰}{\alpha} \right\rfloor = D$

فرمول ۴ $^{(۳)} C = DL_۱ + DL_۲ + DL_۳ + ... + DL_n$

مثال:
در یک دایره به شعاع ۵ سانتی‌متر چند دایره به شعاع ۱ سانتی‌متر جای خواهد گرفت؟ (K=۱, R=۵)
ابتدا تعداد حلقه‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{R}{۲K}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

نکتهٔ ۳. باید توجه داشت:
۱. جزء صحیح حاصل این تقسیم تعداد حلقه‌هاست (در دایره ۲ حلقه داریم).
۲. رقم دهم خارج‌قسمت ۰/۵ شد. پس باید به حاصل محاسبات یک واحد اضافه کنیم.

محاسبهٔ مقدار D برای حلقهٔ ۱ (L=۱): ابتدا B را برای این حلقه به‌دست می‌آوریم:

$$B=۵-(۲\times۱-۱)\times۱=۴$$

حال B را در رابطهٔ زیر قرار می‌دهیم تا α به‌دست آید:

$$\alpha=\cos^{-1}(۱-\frac{۲\times۱^{۲}}{۴^{۲}})=۲۸/۹۹۵۵\approx۲۹$$

سپس D را برای حلقهٔ ۱ با تقسیم ۳۶۰ بر α و گرفتن جزء صحیح آن به‌دست می‌آوریم:

$$DL_{۱}=\left\lfloor\frac{۳۶۰}{۲۹}\right\rfloor=۱۲$$

و حال همین محاسبات را برای حلقهٔ ۲ (L=۲) انجام می‌دهیم:

$$B=۵-(۲\times۲-۱)=۲$$

$$\alpha=\cos^{-1}(۱-\frac{۲\times۱^{۲}}{۲^{۲}})=۶۰$$

$$DL_{۲}=\left\lfloor\frac{۳۶۰}{۶۰}\right\rfloor=۶$$

از آنجا که این دایره بیشتر از دو حلقه نداشت، محاسبات همین‌جا پایان می‌پذیرد و جواب موردنظر، برابر مجموع مقدار Dها است؛ یعنی (در محاسبهٔ مجموع حتماً باید به نکتهٔ ۲ دقت کنیم):

$$C=DL_{۱}+DL_{۲}+DL_{۳}+\ldots+DL_{n}$$

C=۱۲+۶+۱[۴]=۱۹ این دایره

در نتیجه در یک دایره به شعاع ۵ سانتی‌متر، با توجه به محاسبات، ۱۹ دایره با شعاع ۱ سانتی‌متر جای خواهد گرفت.

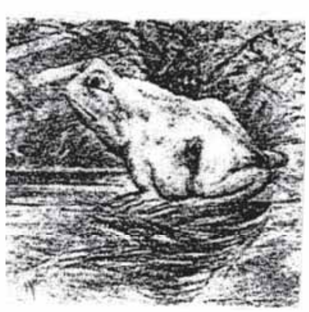
*** پی‌نوشت**
۱. L از واژهٔ «loop» به معنی «حلقه» گرفته شده است.
۲. مقدار L همان شماره‌ای است که به آن اختصاص داده‌ایم ($L_{۱}=۱$).
۳. C از ابتدای کلمهٔ «capacity» به معنی حداکثر گنجایش و «ظرفیت» گرفته شده است.
۴. در اینجا با توجه به نکتهٔ ۲، عدد ۱ به مجموع اضافه شده است.

پرسش‌های پیکارجو!

۱۳۹۵ دانش‌آموز در جایی گرد آمده‌اند. آن‌ها را به دو گروه تقسیم می‌کنیم و حاصل‌ضرب تعداد اعضای دو گروه را محاسبه می‌کنیم. آن‌گاه همین عمل را با دو گروه فوق انجام می‌دهیم و این کار را تا آنجا ادامه می‌دهیم که گروه‌های یک نفری ایجاد شوند. مجموع این حاصل‌ضرب‌ها کدام است؟

الف) $۱۳۹۵^{۲}$ ب) $۱۳۹۴^{۲}$ ج) ۱۳۹۴×۱۳۹۵ د) $\frac{۱۳۹۴\times۱۳۹۵}{۲}$ هـ) $\frac{۱۳۹۵^{۲}}{۲}$

۸. در شکل زیر چه می‌بینند؟



تفریح اندیشه!